$* \lim\limits_{t\to+\infty} u(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} te^{-\frac{t}{2}} = \lim\limits_{T\to-\infty} -2Te^{T} = 0$ (avec $T = -\frac{t}{2}$)

D'aprés le tableau de variation de u on a :

$\forall t \geq 0; 0 \leq u(t) \leq 2e^{-1} \leq 1$

$\Rightarrow \forall t \geq 0; 0 \leq f_1(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1.$

2)a- $\forall t \geq 0; 0 \leq f_1(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1$

$\Rightarrow \forall t \geq 0; f_1(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}.$

• Montrons par récurrence que $\forall n \in IN^*$ on a $f_n(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$

· $f_1(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$ (évident)

* Soit $p \in IN^*$; Supposons que $f_p(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$;montrons que $f_{p+1}(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$ en effet

$f_{p+1}(t) \leq f_p(t); \forall t \geq 0$ d'après **A-1/b-**

de plus $f_p(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$ (par supposition de récurrence)

D'où $f_{p+1}(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$ (par transitivité de l'inégalité).

Conlusion : $\forall n \in IN^*$ on a $f_n(t) \leq f_1(t); \forall t \geq 0$

Or $\forall t \geq 0; f_1(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$ donc $\forall t \geq 0; f_n(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$.

○ $\forall t \geq 0; f_n(t) = x^n e^{-nx} \geq 0$

Bilan : $\forall t \geq 0; 0 \leq f_n(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$.

b- $\forall x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$,on a d'après la question précédente

$\forall t \in [0; x]; 0 \leq f_n(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x f_n(t)dt \leq \int_0^x e^{-\frac{t}{2}} dt$

$\Leftrightarrow 0 \leq F_n(x) \leq \left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x = -2e^{-\frac{x}{2}} + 2.$

D'autre part $\forall x \geq 0; -2e^{-\frac{x}{2}} < 0 \Leftrightarrow \forall x \geq 0; 2-2e^{-\frac{x}{2}} < 2.$

Enfin $0 \leq F_n(x) \leq 2; \forall x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$.

C-1)a- Pour tout réel $u \geq 0$ et $\forall n \in IN^* \setminus \{1\}$;

$G_n(u) = \int_0^u t^n e^{-t} dt$

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) = e^{-t} & \rightleftarrows & u_1(t) = -e^{-t} \\ v_1(t) = t^n & \rightleftarrows & v_1'(t) = nt^{n-1} \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow G_n(u) = [-t^n e^{-t}]_0^u + n\int_0^u t^{n-1} e^{-t} dt = -u^n e^{-u} + nG_{n-1}(u).$

b- $\oplus\ G_2(u) = -u^2 e^{-u} + 2G_1(u) = -2!e^{-u} \sum_{p=2}^{2} \frac{u^p}{p!} + 2!G_1(u)$